Problem 1

1) 全体对称矩阵不为空, 对称矩阵的和仍为对称矩阵(加法全体对对称矩阵封闭)

矩阵加法具有结合性, 对任意对称矩阵A有A+O=O+A=A, O为幺元

对任意A有A+(-A)=O, -A仍为对称矩阵, 每个元素都有对应逆元, 构成

2) 全体对角矩阵不为空, 对角矩阵的和仍为对角矩阵(加法全体对对角矩阵封闭)

矩阵加法具有结合性, 对任意对角矩阵IA有IA+O=O+IA=IA, O为幺元

对任意IA有IA+(-IA)=O, -IA仍为对称矩阵, 每个元素都有对应逆元, 构成

3) 全体行列式大于等于0的矩阵不为空

取A=[1, 0], B=[-1, 1], |A|=1>0, |B|=0, A+B=[0, 1], |A+B| = -1<0

[0, 1] [1, -1] [1, 0]

行列式大于等于零的矩阵的和行列式可能小于零(加法不封闭), 不构成

4) 全体上(下)三角矩阵不为空, 上(下)三角矩阵的和仍为上(下)三角矩阵

矩阵加法具有结合性, 对任意三角矩阵A有A+O=O+A=A, O为幺元

对任意A有A+(-A)=O, -A仍为三角矩阵, 每个元素都有对应逆元, 构成

Problem 2

a∈G且aa=aa, a∈N(a), N(a)≠∅

任取x, y∈G满足xa=ax, ya=ay, a^-1yaa^-1=a^-1aya^-1即a^-1y=y^a-1

(xy^-1)a = x(y^-1a) = x(a^-1y)^-1 = x(ya^-1)^-1 = x(ay^-1) = (xa)y^-1

= (ax)y^-1 = a(xy^-1), xy^-1∈N(a), 由判定定理可知N(a)是G的子群

Problem 3

对于e∈G有e∈H且xex^-1 = xx^-1 = e∈xHx^-1, xHx^-1非空

对于a, b∈xHx^-1, 有s, t∈H使得a=xsx^-1, b=xtx^-1

ab^-1=(xsx^-1)(xtx^-1)^-1 = (xsx^-1)(xt^-1x^-1) = x(st^-1)x^-1

H是G的子群, 对于s, t∈H有st^-1∈H, x(st^-1)x^-1∈xHx^-1

即ab^-1∈xHx^-1, 由判定定理可知xHx^-1是G的子群

Problem 4

H和K分别为G的r, s阶子群, 则e∈H, e∈K, e∈H∩K

设存在x≠e满足x∈H∩K, x∈H, x∈K, |x|为|H|与|K|的因子, |x| | r, |x| | s

又r和s互素, 则|<x>|=|x|=1, x=e, 矛盾, 不存在这样的x, H∩K={e}

Problem 5

设群G中只有一个2阶元a满足a≠e且a^2=e, 则任取G中的元素x

(xax^-1)^2 = (xax^-1)(xax^-1) = xa^2x^-1 = xex^-1 = xx^-1 = e

若xax^-1=e, xa=x, 由消去律得a=e, 矛盾, 则xax^-1≠e

xax^-1为2阶元, 又二阶元只有一个, 故xax^-1=a, xa=ax, a与G中任意x可交换